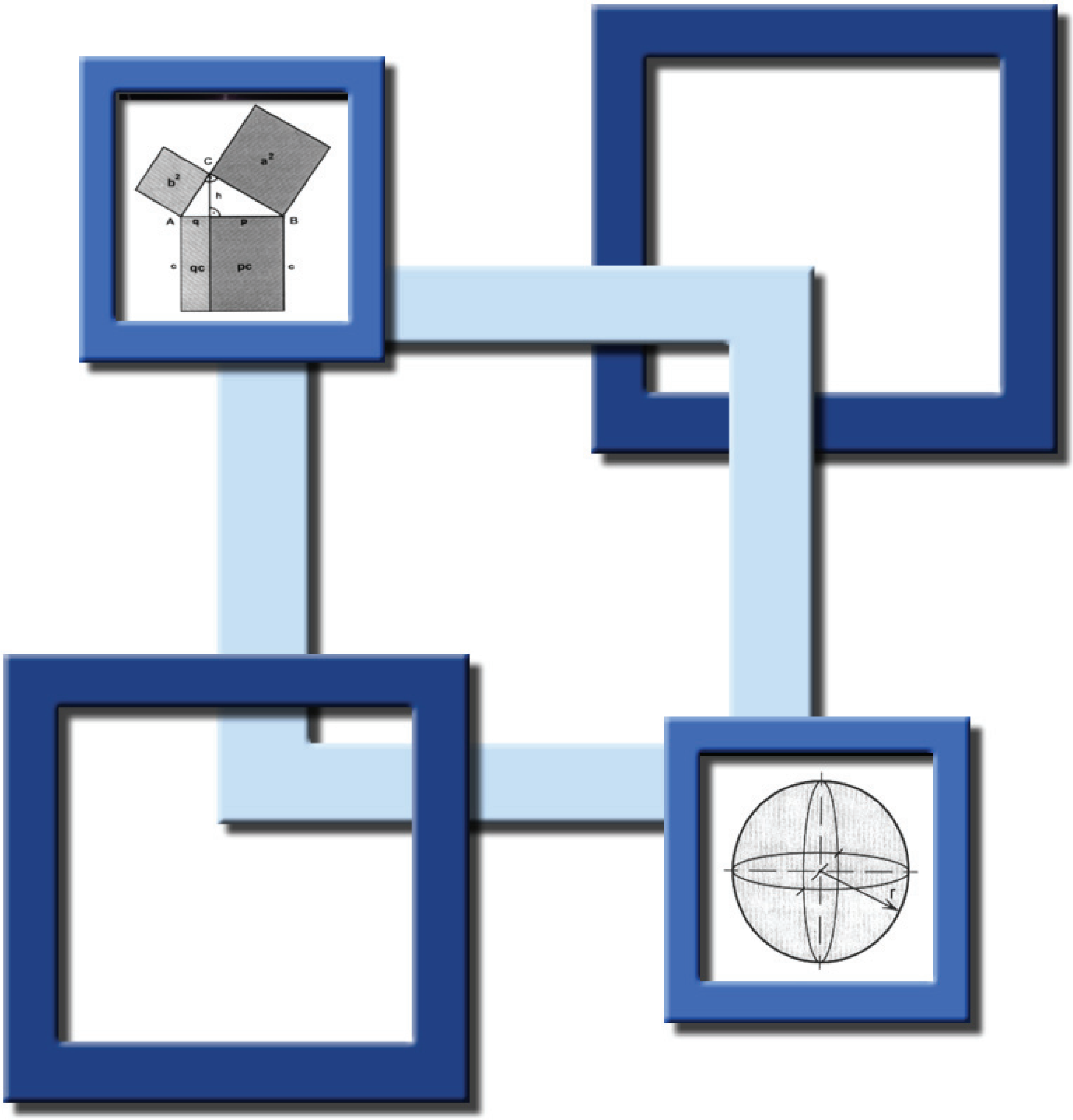


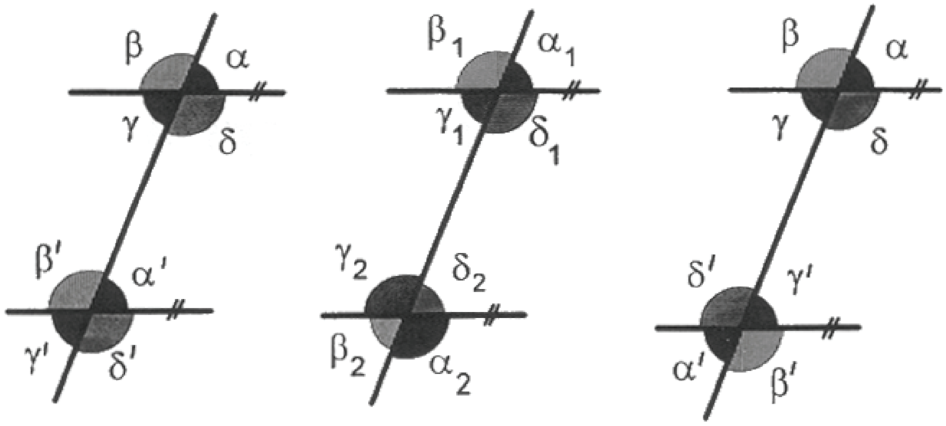
Geometrie

Formelsammlung

Inhaltsverzeichnis

1. Planimetrie

1.1. Winkel an geschnittenen Parallelen

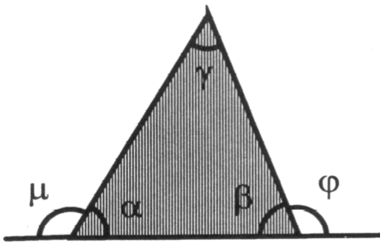


Stufenwinkel
$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$

Gegenwinkel
$\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$
$\beta_1 + \beta_2 = 180°$

Wechselwinkel
$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$

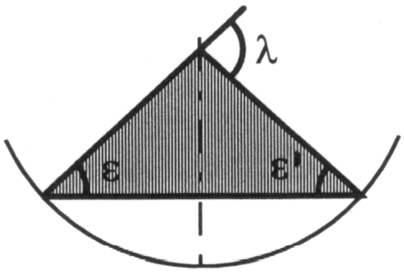
1.2. Winkel am Dreieck



$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

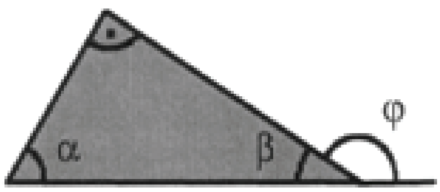
$$\boxed{\begin{aligned} \varphi &= \alpha + \gamma \\ \mu &= \beta + \gamma \end{aligned}}$$

Gleichschenkliges Dreieck



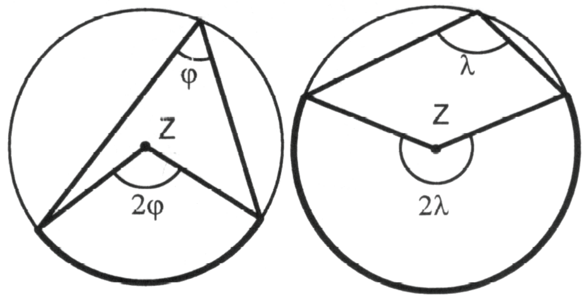
$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon' \\ \lambda &= 2\varepsilon \end{aligned}}$$

Rechtwinkliges Dreieck

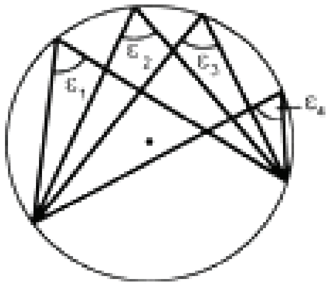


$$\boxed{\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90° \\ \alpha + 90° &= \varphi \end{aligned}}$$

1.3. Winkel am Kreis

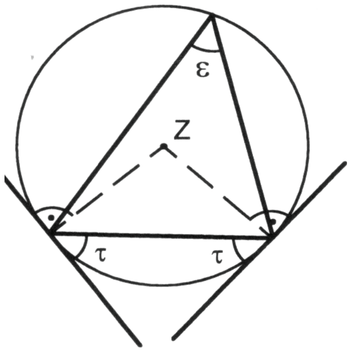


Ein **Peripheriewinkel** ist halb so gross wie der zugehörige **Zentriwinkel.**



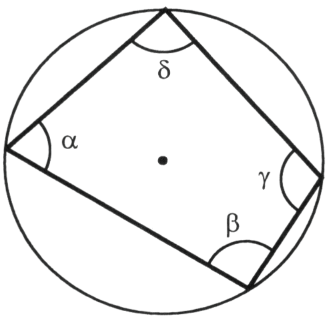
Alle **Peripheriewinkel** über gleichem Bogen sind gleich gross.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$$



Ein **Sehnentangentenwinkel** ist gleich gross wie ein Peripheriewinkel über dem eingeschlossenen Bogen.

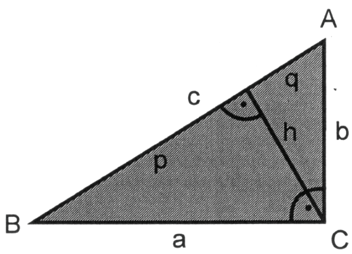
$$\tau = \varepsilon$$



Sehnenviereck
Ein Viereck, das einen Umkreis hat heisst Sehnenviereck. Im Sehnenviereck beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180°.

$$\alpha + \gamma = 180°$$
$$\beta + \delta = 180°$$

1.4. Satz des Pythagoras

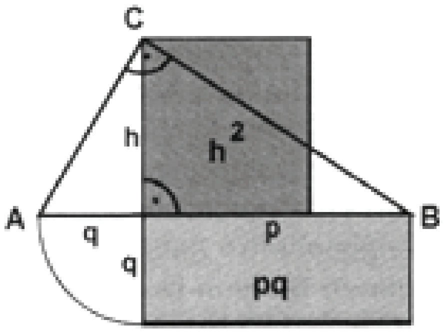


Addiert man das Quadrat der Katheten a und b erhält man das Quadrat der Hypotenuse.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

1.5. Höhensatz

Im rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck, gebildet aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

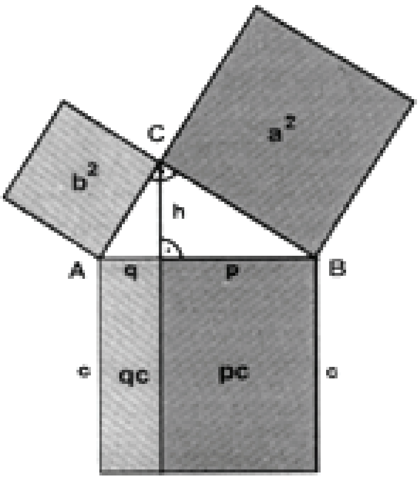


$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

p, q: Hypotenusenabschnitte

1.6. Kathetensatz

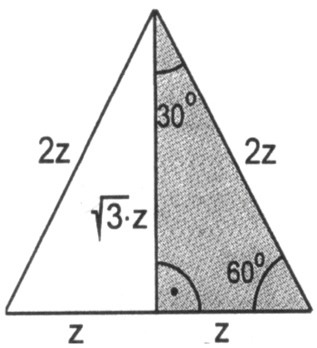
Im rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck, gebildet aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.



$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= c \cdot p \\ b^2 &= c \cdot q \end{aligned}}$$

a, b: Katheten
c: Hypotenuse
p, q Hypotenusenabschnitte

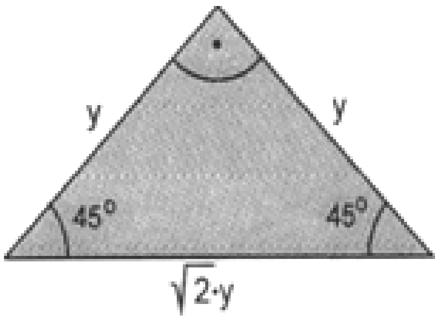
1.7. Gleichseitiges Dreieck



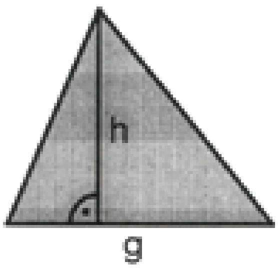
Fläche des gleichschenkligen Dreiecks:

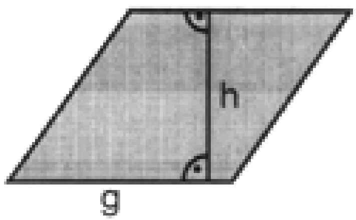
$$\boxed{A = \frac{\sqrt{3} \cdot z^2}{4}}$$

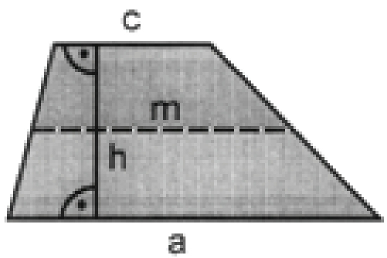
1.8. Gleichschenklig - rechtwinkliges Dreieck



1.9. Flächeninhalte







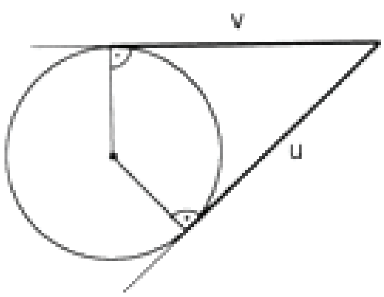
Dreieck	*Parallelogramm*	*Trapez*
$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$	$A = g \cdot h$	$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

1.10. Innenwinkelsumme eines beliebigen n-Ecks

Mit folgender Formel kann die Innenwinkelsumme für beliebigen n-Ecke berechnet werden:

$$\boxed{s = (n-2) \cdot 180°}$$

s: Innenwinkelsumme
n: Anzahl Ecken

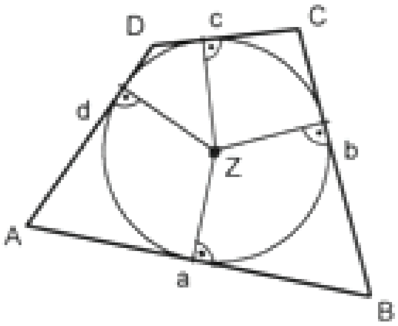


1.11. Tangentenabschnitte

Die Abschnitte u und v der Tangenten von einem Punkt an einen Kreis sind gleich lang:

$$\boxed{v = u}$$

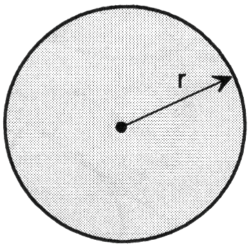
1.12. Tangentenviereck



In jedem Tangentenviereck sind die Summen zweier Gegenseiten gleich gross:

$$\boxed{a + c = b + d}$$

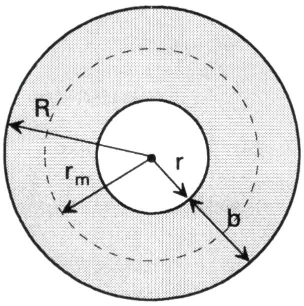
1.13. Kreis und Kreisring



Kreis

Umfang $\boxed{u = 2\pi \cdot r}$

Flächeninhalt $\boxed{A = \pi r^2}$

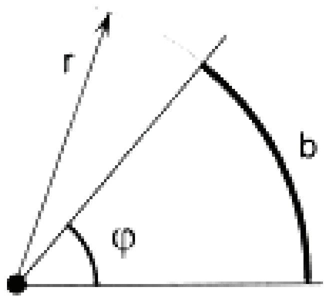


Kreisring

Ringbreite $\boxed{b = R - r}$

Flächeninhalt $\boxed{\begin{array}{l} A = \pi\left(R^2 - r^2\right) \\ A = 2\pi r_m \cdot b \end{array}}$ $\boxed{r_m = r + \frac{b}{2}}$

1.14. Bogenmass



Winkel im Bogenmass

$$\boxed{\hat{\varphi} = \frac{b}{r}}$$

r = beliebiger Radius
b = Länge des Kreisbogens

Umrechnung $\boxed{\varphi\ rad = \frac{\varphi}{360°} \cdot 2\pi}$

1.15. Potenzreihen für sin(x), cos(x) und tan(x)

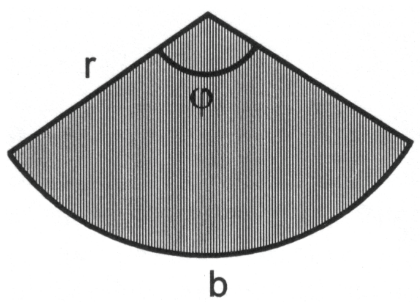
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots, x \in R$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots, x \in R$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots\ldots\ldots, |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \quad (n \ \mathit{Fakultät})$$

1.16. Kreissektor



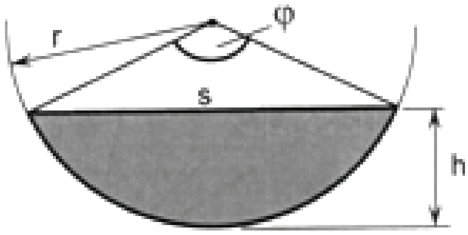
r = Radius
b = Bogenlänge
φ = Zentriwinkel $0 < \widehat{\varphi} < 2\pi$
A_{SK} = Flächeninhalt

$$\boxed{b = \frac{\varphi}{360°} \cdot 2\pi r = \widehat{\varphi} \cdot r}$$

$$\boxed{A_{SK} = \frac{\varphi}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \widehat{\varphi} \cdot r^2}$$

$$\boxed{A_{SK} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r}$$

1.17. Kreissegment



r = Radius
φ = Zentriwinkel $0 < \widehat{\varphi} < 2\pi$
s = Sehnenlänge
h = Segmenthöhe
A_{SG} = Flächeninhalt

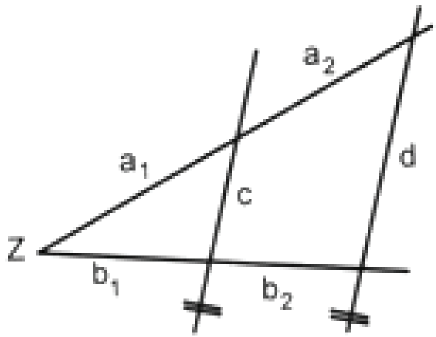
$$A_{SG} = \begin{cases} A_{SK} - A_{Dreieck}, & \text{falls } \widehat{\varphi} < \pi \\ A_{SK} + A_{Dreieck}, & \text{falls } \widehat{\varphi} > \pi \end{cases}$$

$$A_{SG} = \left(\frac{\pi \cdot \varphi}{360°} - \frac{\sin(\varphi)}{2} \right) \cdot r^2$$

$$A_{SG} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\varphi} - \sin(\widehat{\varphi}) \right) \cdot r^2$$

1.18. Strahlensätze

Werden zwei Halbgeraden, die von einem Punkt Z (Scheitel) ausgehen, von mindestens zwei Parallelen geschnitten, so heisst die Anordnung **Strahlensatzfigur.**



a_n, b_n heissen **Strahlenabschnitte**

c, d heissen Parallelenabschnitte

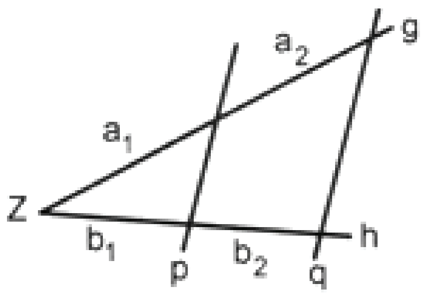
1. Strahlensatz (Ohne Parallelenabschnitte)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$ oder $$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

2. Strahlensatz (Mit Parallelenabschnitte)

$$\frac{c}{d} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$ oder $$\frac{c}{d} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$$

Umkehrung des 1. Strahlensatzes



Gegeben sind:

Zwei Halbgeraden g und h mit gemeinsamen Anfangspunkt Z

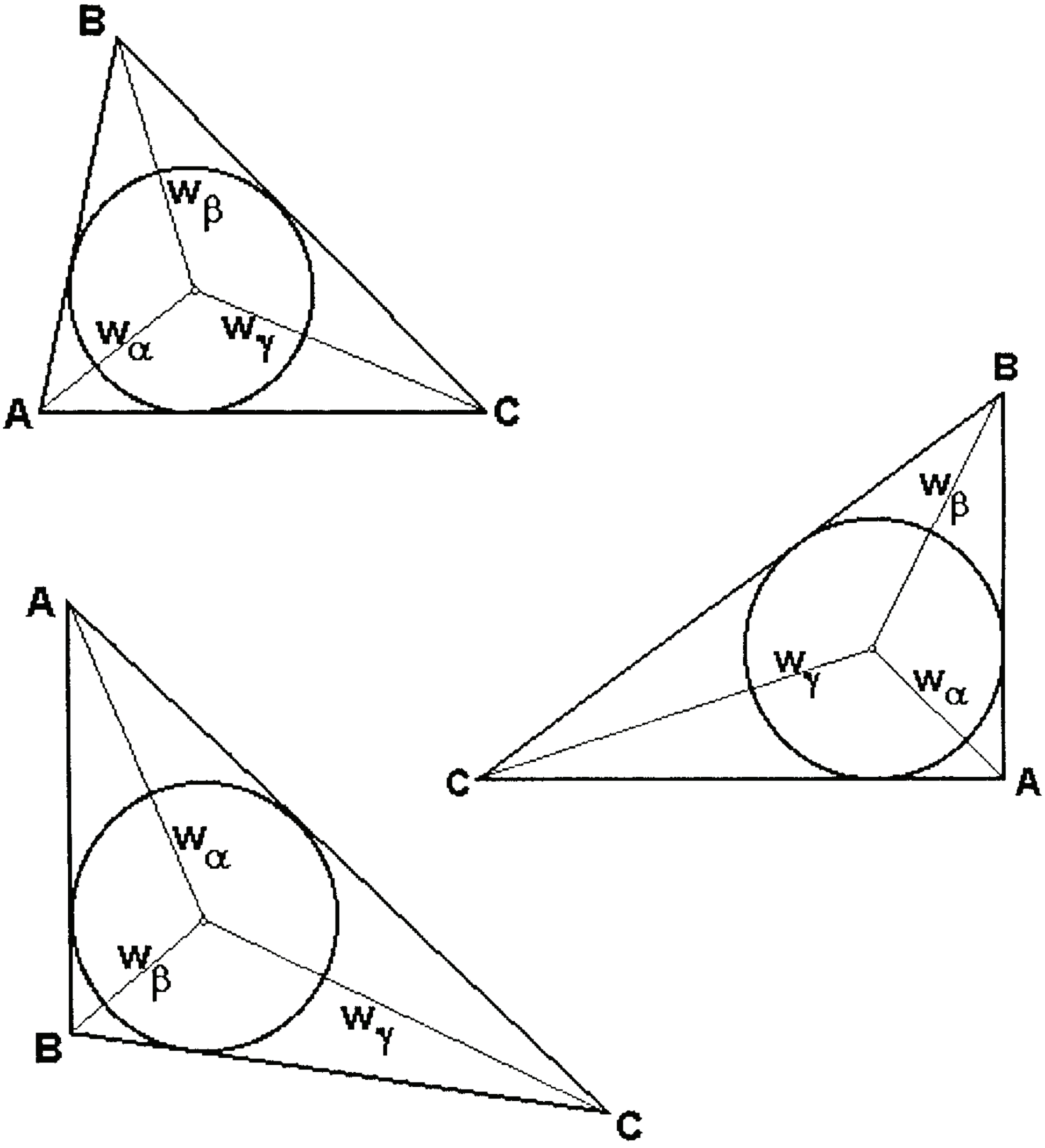
Zwei Geraden p und q, welche die Halbgeraden schneiden.

Wenn $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ dann sind p und q parallel.

Die **Umkehrung des 2. Strahlensatzes** gilt nicht!

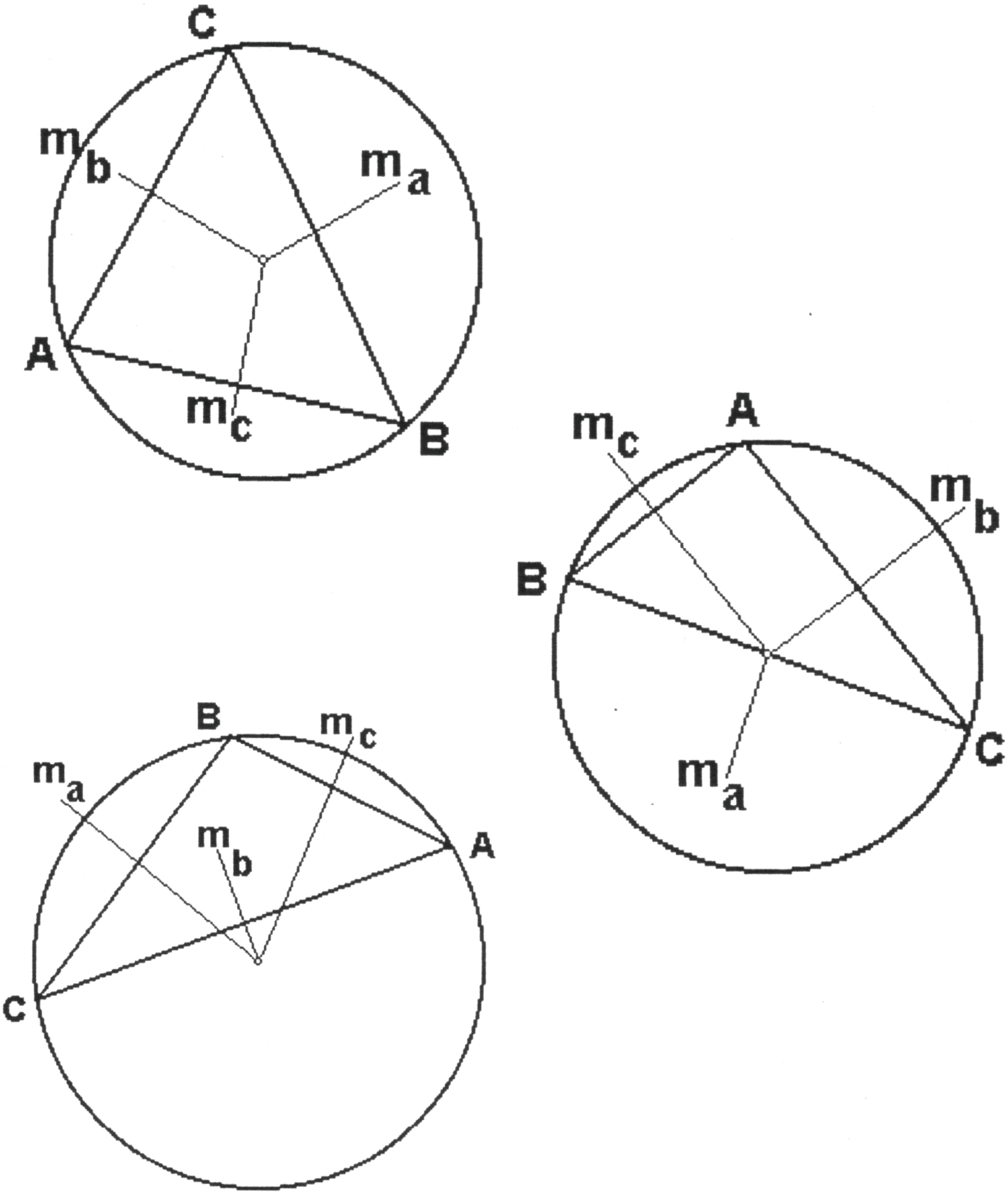
1.19. Inkreis

Die Winkelhalbierenden w_α, w_β, w_γ eines Dreiecks ABC schneiden sich im Inkreismittelpunkt.



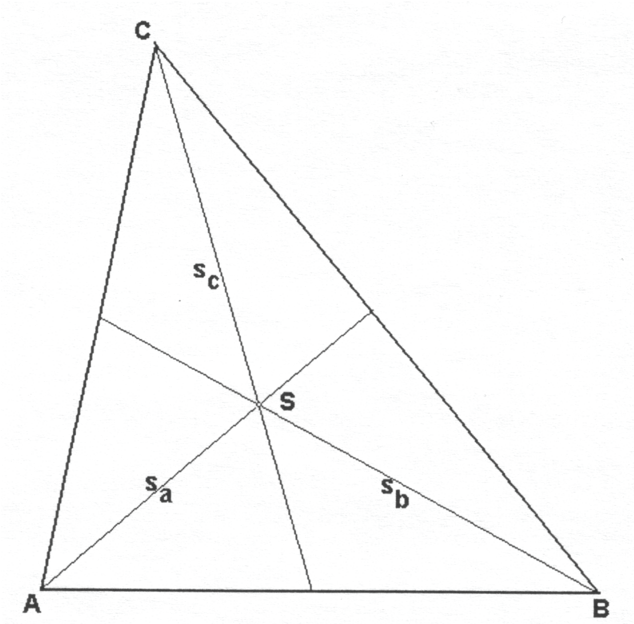
1.20. Umkreis

Die Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c eines Dreiecks ABC schneiden sich im Umkreismittelpunkt.



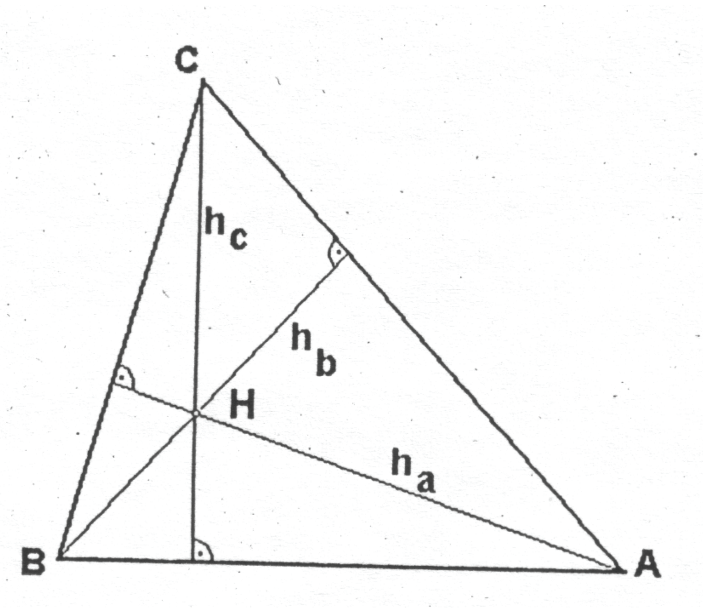
1.21. Schwerpunkt eines Dreiecks

Die Seitenhalbierenden (Schwerelinien) s_a, s_b, s_c eines Dreiecks ABC schneiden sich im Schwerpunkt S. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1.



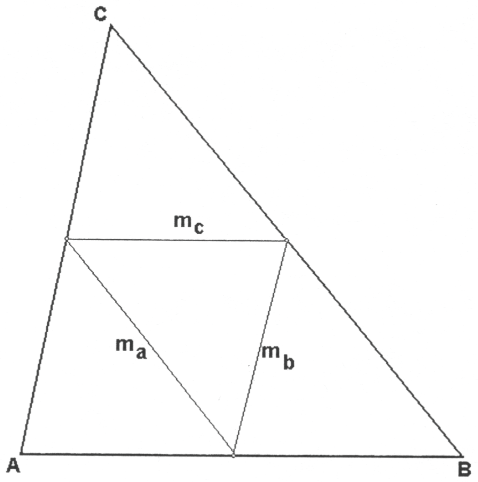
1.22. Höhelinien

Die Höhenlinien h_a, h_b, h_c eines Dreiecks ABC schneiden sich im Höhenschnittpunkt.



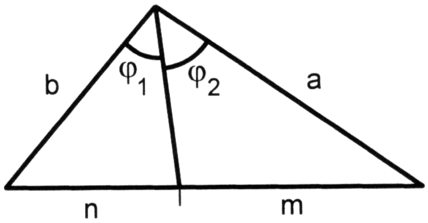
1.23. Mittellinien

Die Mittellinien m_a, m_b, m_c eines Dreiecks ABC sind halb so lang wie die Gegenseiten und parallel zu diesen. Sie teilen das Dreieck in vier kongruente Teildreiecke.



1.24. Winkelhalbierende im Dreieck

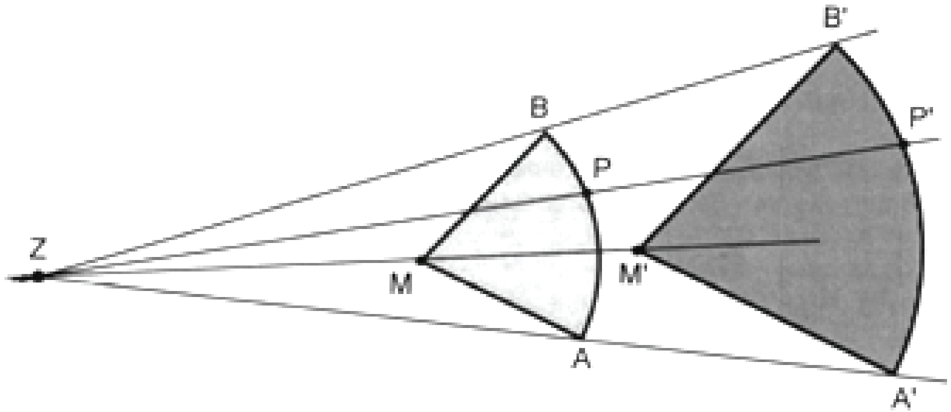
Eine Winkelhalbierende ($\varphi_1 = \varphi_2$) teilt die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.



$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{a}{b}}$$

1.25. Zentrische Streckung

Eine Abbildung heisst zentrische Streckung mit dem Streckzentrum Z und dem Streckungsfaktor k (k ist eine positive, reele Zahl), wenn gilt:



Der Bildpunkt P' des Originalpunktes P liegt auf dem Strahl ZP und

$\boxed{ZP' = k \cdot ZP}$

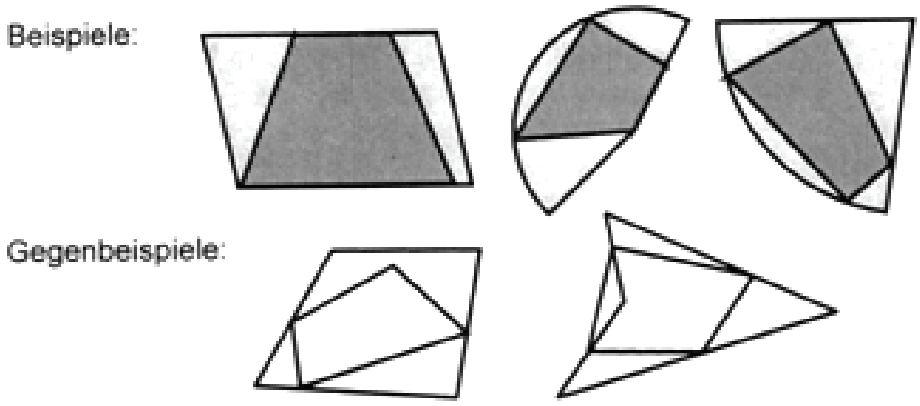
0 < k < 1 Das Bild ist kleiner als das Original → **Verkleinerung**
1 < k Das Bild ist grösser als das Original → **Vergrösserung**
k = 1 Bild und Original sind gleich kongruent.

Eigenschaften der zentrischen Streckung

1. Eine Gerade wird auf eine Gerade abgebildet. Gerade und Bild-Gerade sind parallel.
2. Das Bild einer Strecke hat die k – fache Länge: $a' = k \cdot a$
3. Winkel werden auf gleichgrosse Winkel abgebildet: $\alpha' = \alpha$
4. Das Bild eines Kreises ist ein Kreis mit dem Radius: $r' = k \cdot r$
5. Der Flächeninhalt der Bildfigur ist k^2 – mal so gross wie der Flächeninhalt des Originals: $A' = k^2 \cdot A$

1.26. Einbeschreibungsaufgaben

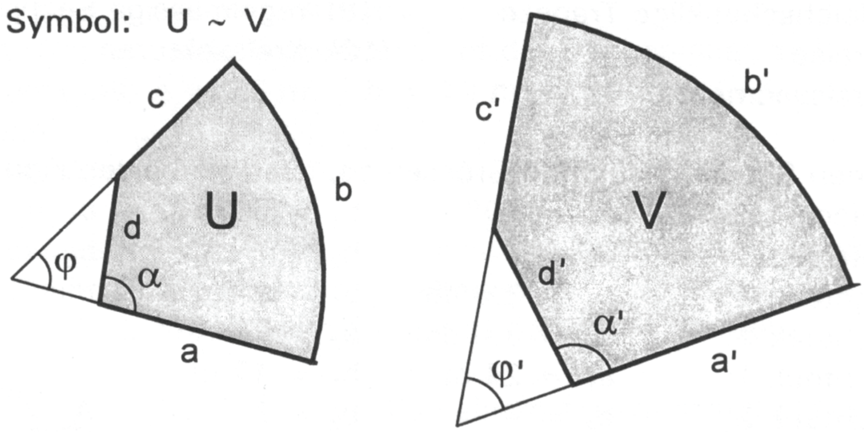
Ein konvexes Vieleck A heisst einer konvexen Figur B **einbeschrieben**, wenn jede Ecke von A auf dem Rand von B liegt:



1.27. Ähnliche Figuren

Eine Figur U heisst **ähnlich** zu einer Figur V, wenn man U mit Hilfe einer zentrischen Streckung so vergrössern oder verkleinern kann, dass sie zu V kongruent ist.

Symbol: U ~ V



In ähnlichen Figuren sind alle entsprechenden Winkel gleich gross, und alle entsprechenden Strecken als auch Kurven haben dasselbe Längenverhältnis.

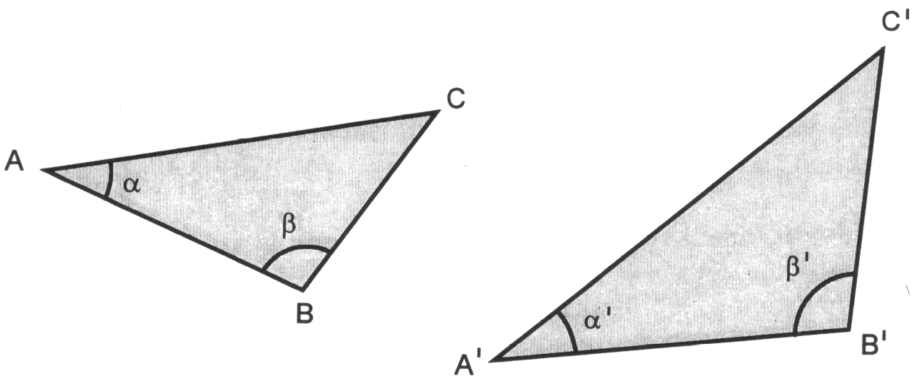
$$U \sim V \quad \begin{cases} \varphi' = \varphi, \quad \alpha' = \alpha \\ k = \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c} = ... = \dfrac{a'+b'+c'+d'}{a+b+c+d} \end{cases}$$

k: Streckungsfaktor

Flächeninhalte: U ~ V → $k^2 = \dfrac{A_V}{A_U}$

1.28. Ähnliche Dreiecke

Stimmen zwei Dreiecke in **zwei** Winkeln überein, dann sind sie ähnlich:



$$\alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta' \quad \rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, dann haben zwei entsprechende Strecken (z.B. Seiten, Höhen, Winkelhalbierende, Umkreisradien, Umfänge, ...) das gleiche Längenverhältnis.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \rightarrow k = \frac{a'}{a} = \frac{h'}{h} = \frac{w'}{w} = \frac{r'}{r} = ...$$

$$k = \frac{u'}{u}$$

$$a' = k \cdot a, \quad h' = k \cdot h, ...$$

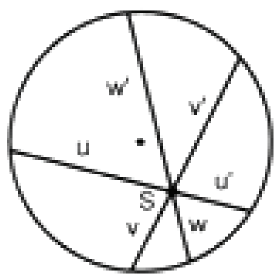
k: Streckungsfaktor

Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken.

$$\Delta\text{ABC} \sim \Delta A'B'C' \rightarrow \frac{A_{A'B'C'}}{A_{ABC}} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = ... = k^2$$

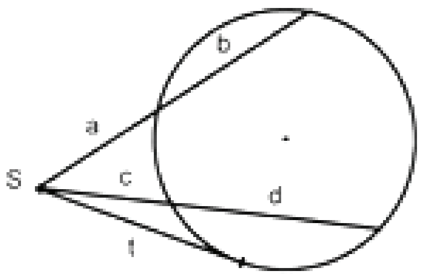
$$\rightarrow A_{A'B'C'} = k^2 \cdot A_{ABC}$$

1.29. Ähnlichkeit am Kreis



Sehnensatz

$$\boxed{u \cdot u' = v \cdot v' = w \cdot w'}$$



Sekanten - Tangentensatz

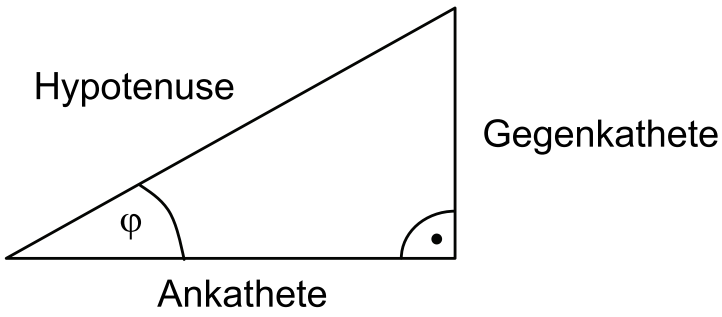
$$\boxed{a(a+b) = c(c+d) = t^2}$$

Zusammengefasst (**Potenzsatz**):

Für jede Transversale eines Kreises durch einen Punkt S ist das Produkt der Entfernungen zwischen S und den Schnittpunkten mit dem Kreis jeweils konstant. Liegt S ausserhalb des Kreises, so hat auch das Quadrat des Tangentenabschnittes denselben Wert.

2. Trigometrie

2.1. Rechtwinkliges Dreieck



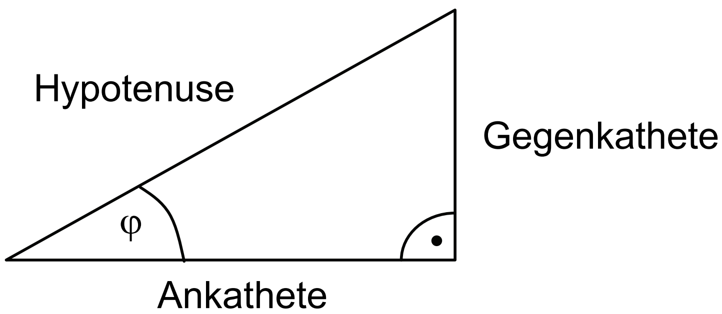
Seitenverhältnisse

Sinus $\sin(\varphi) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $(0° < \varphi < 90°)$

Cosinus $\cos(\varphi) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Tangens $\tan(\varphi) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankatete}}$

2.2. Arcusfunktionen

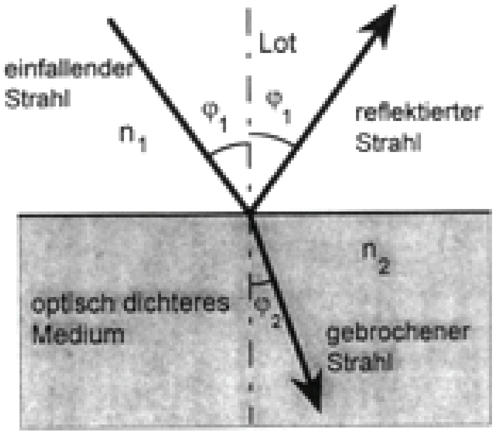


$\sin(\varphi) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \rightarrow \quad \varphi = \sin^{-1} \cdot \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos(\varphi) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1} \cdot \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\tan(\varphi) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankatete}} \rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1} \cdot \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankatete}}$

2.3. Brechung von Licht



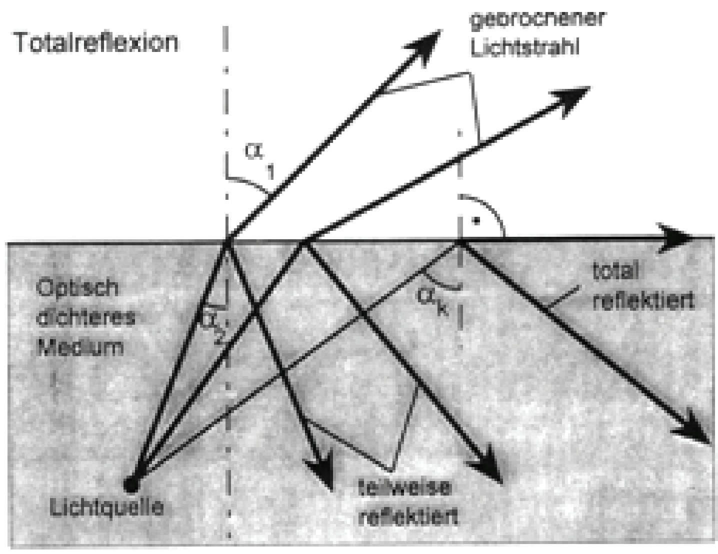
Brechungsgesetz von Snellius

$$\boxed{n_1 \cdot \sin(\varphi_1) = n_2 \cdot \sin(\varphi_2)}$$

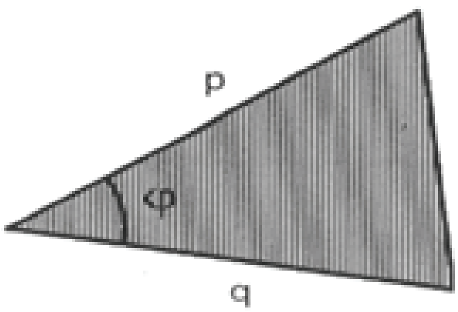
n: Brechzahl

Totalreflexion

Kritischer Einfallswinkel, wenn Brechungswinkel 90° erreicht.



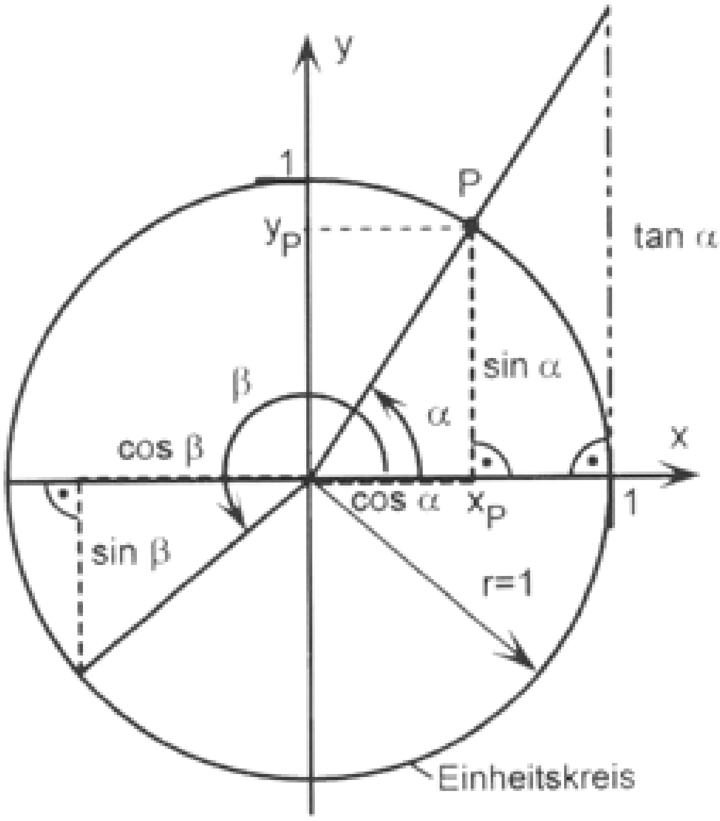
2.4. Flächeninhalt eines Dreiecks



In jedem Dreieck gilt:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin(\varphi)}$$

2.5. Einheitskreis



Definition

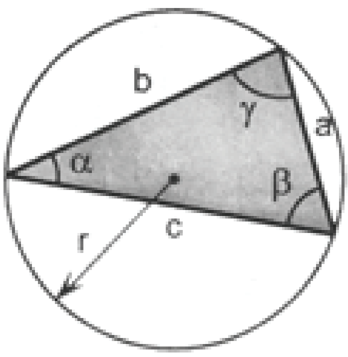
$$\sin(\alpha) = y_P$$

$$\cos(\alpha) = x_P$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$(x_P \neq 0)$$

2.6. Sinussatz

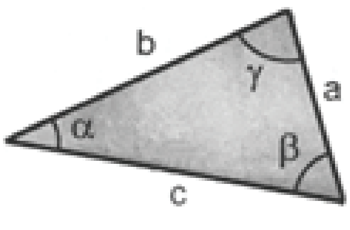


In jedem Dreieck ABC gilt:

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r}$$

a : b : c = sin(α) : sin(β) : sin(γ)

2.7. Cosinussatz



$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}}$$

3. Goniometrie

3.1. Beziehungen zwischen sin(α), cos(α) und tan(α)

$$\boxed{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1}$$

$$\boxed{\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

3.2. Additionstheoreme

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}\\ \tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}\end{aligned}}$$

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(90°-\alpha)=\frac{1}{\tan\alpha}$$

3.3. Funktion des doppelten Winkels

$$\boxed{\sin(2\alpha)=2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}$$

$$\boxed{\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-2\cdot\sin^2(\alpha)=2\cdot\cos^2(\alpha)-1}$$

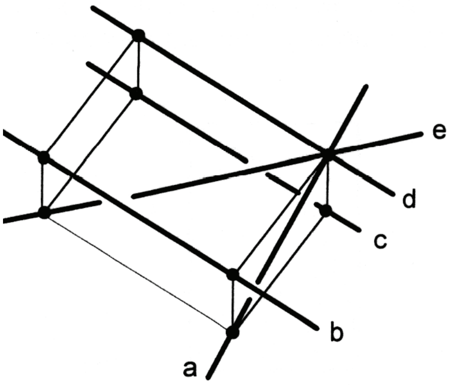
$$\boxed{\tan(2\alpha)=\frac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}}$$

4. Stereometrie

4.1. Lage von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum

Symbole: Punkte: A, B, C, ... Geraden: a, b, c, …
Ebenen: ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε (ABC)

Gegenseitige Lage von Geraden



sich schneidende Geraden:
a und e
a und d

parallele Geraden:
b, c und d

windschiefe Geraden:
a und b, a und c
e und b, e und c

4.2. Ebene

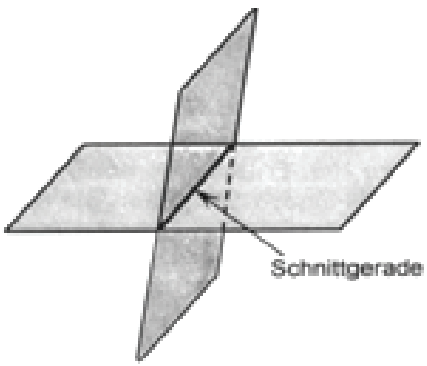
Eine Ebene ist eindeutig festgelegt durch:

3 Punkte A, B, C	1 Punkt A und 1 Gerade g	2 sich schnei - dende Geraden	2 parallel Geraden

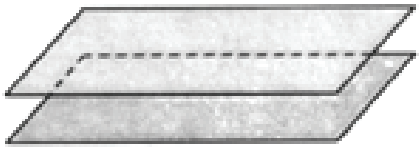
Gegenseitige Lage von Ebenen

Zwei Ebenen

schneiden sich

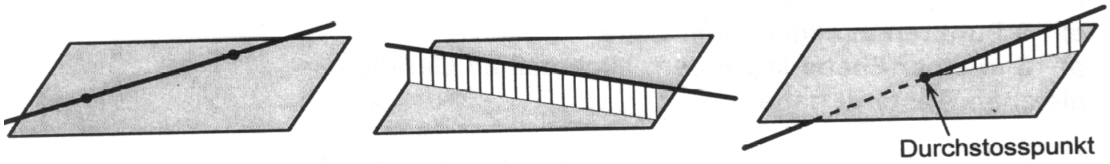


sind parallel



Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

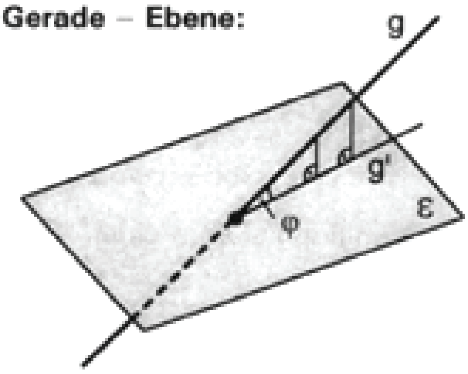
Die Gerade liegt in der Ebene	ist parallel zur Ebene	durchstösst die Ebene



4.3. Winkel im Raum

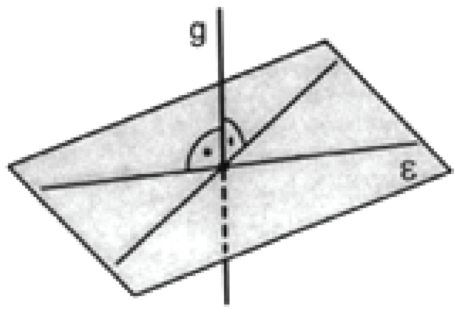
Der Winkel φ zwischen einer Geraden g und einer Ebenen ε ist der Winkel zwischen der Gerade g und ihrer Projektion g' in der Ebene ε.

Gerade – Ebene:



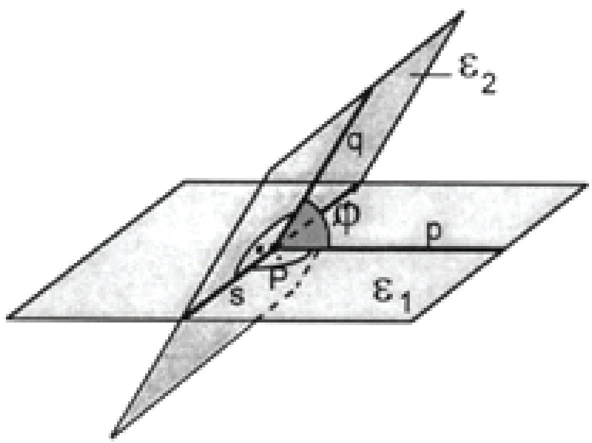
Spezialfall: **Lot**

Eine Gerade g heisst Lot einer Ebene ε, wenn mindestens zwei Geraden gibt, die zu g senkrecht stehen. Die Ebene ε ist die **Normalebene** zu g.



Der Winkel φ ($\varphi < 90°$) zwischen den Ebenen ε_1 und ε_2 ist wie folgt definiert:

Ebene – Ebene:



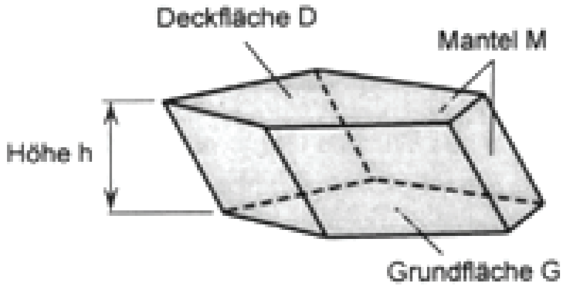
Errichtet man in einem beliebigen Punkt P der Schnittgerade je eine Senkrechte p und q zu s in beiden Ebenen, so bilden diese Geraden den Winkel φ,

Spezialfall: **Normalebene**
Ist $\varphi = 90°$ stehen die beiden Ebenen normal zueinander.

4.4. Prisma

Jeder geometrische Körper, der begrenzt wird von

zwei kongruenten und parallelen n - Ecken (Grund - und Deckfläche) und n Parallelogrammen (Mantel) heisst n - seitiges Prisma



5-seitiges Prisma

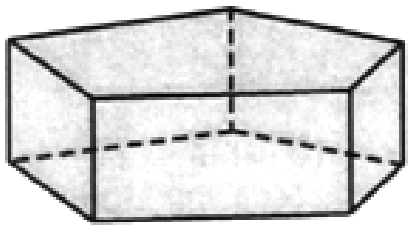
Die Oberfläche S: $\boxed{S = M + G + D}$

M: Mentelfläche (Summe aller Seiten)
G: Grundfläche
D: Deckfläche D = G

Das Volumen V: $\boxed{V = G \cdot h}$

h: Höhe (Abstand von Grund - und Deckfläche)

Gerades Prisma



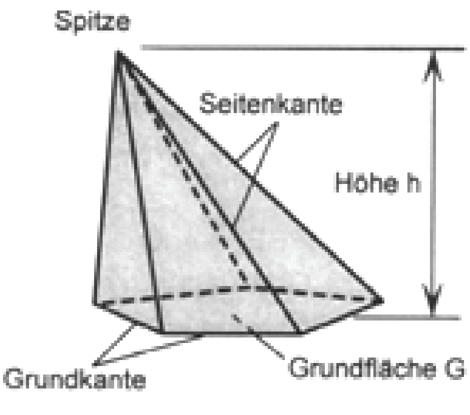
Ein Körper heisst gerades Prisma, wenn der Mantel ausschliesslich aus Rechtecken besteht.

Sonderfälle des geraden Prismas

Reguläres Prisma: Die Grundfläche ist ein reguläres Vieleck
Quader: Die Grundfläche ist ein Rechteck
Würfel: Quader mit lauter gleich langen Kanten

4.5. Pyramide

n-seitige Pyramide



5-seitige Pyramide

Eine n - seitige Pyramide ist ein geometrischer Körper, der begrenzt wird von einem Vieleck (n - Eck) und von n - Dreiecken (Seitenflächen), die einen Eckpunkt (Spitze) gemeinsam haben.

Die Oberfläche S: $\boxed{S = M + G}$

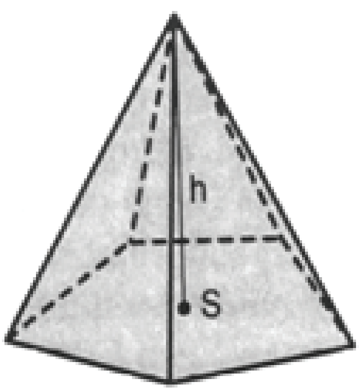
M: Mantelfläche (Summe aller Seitenflächen)
G: Grundfläche

Das Volumen V: $\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$

H: Abstand der Spitze von G

Gerade Pyramide

Bei der Geraden Pyramide fällt der Fusspunkt der Höhe h mit dem Schwerepunkt S der Grundfäche zusammen.



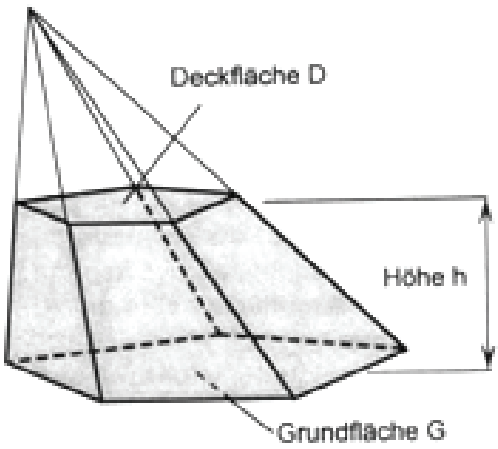
Reguläre Pyramide
Die Grundfläche ist ein reguläres Vieleck

Tetraeder
Die Grundfläche ist ein Dreieck

Reguläres Tetraeder
Vier gleichseitige Dreiecke als Begrenzungsflächen

4.6. n-seitiger Pyramidenstumpf

Pyramidenstumpf nennt man jeden geometrischen Körper, der entsteht, wenn eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird. Damit erhält man einen Pyramidenstumpf und eine Ergänzungspyramide.



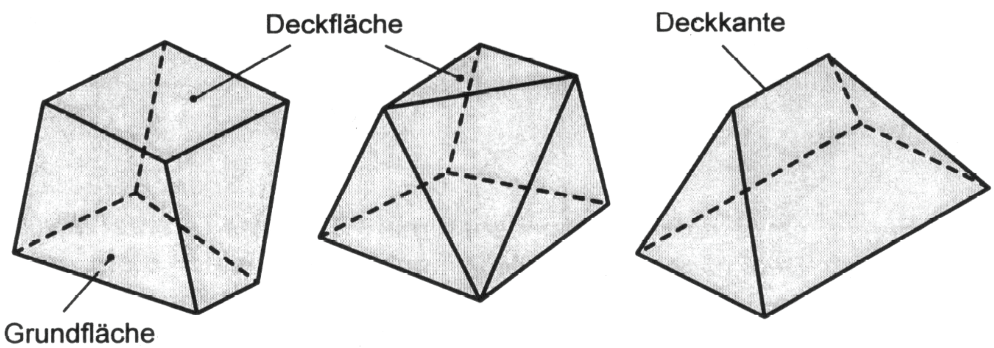
5-seitiger Pyramidenstumpf

Ein Pyramidenstumpf wird von zwei zueinander **parallelen** und **ähnlichen** aber nicht kongruenten n - Ecken sowie n Trapezen begrenzt.

Volumen:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot h\left(G + \sqrt{GD} + D\right)}$$

4.7. Prismatoide



Ein **Prismatoid** ist ein Polyeder mit der folgenden Oberfläche:

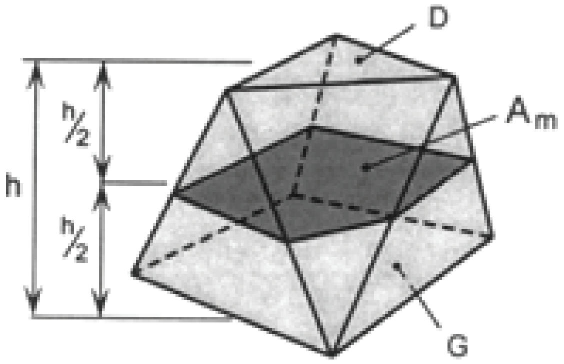
- Grund - und Deckfläche sind parallel Vielecke; die Eckzahl kann verschieden sein
- Die Deckfläche darf zu einer Strecke (Deckkante) oder einem Punkt entartet sein.
- Der Mantel besteht aus Dreiecken, Trapezen oder Parallelogrammen.

Sonderfälle des Prismatoids

Prisma, Pyramide und Pyramidenstumpf

Bei einem **senkrechten** Prismatoid liegen die Schwerpunkte der Grund - und Deckfläche senkrecht übereinander.

Das Volumen eines Prismatoids:

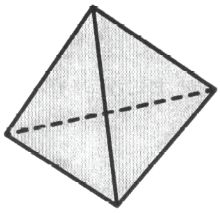


$$\boxed{V = \frac{h}{6}\left(G + D + 4A_m\right)}$$

h: Höhe (Abstand zwischen Grund - und Deckfläche)
G: Grundfläche
D: Deckfläche (besteht diese aus einer Strecke oder einem Punkt, so ist D = 0 einzusetzen)
A_m: Mittelschnittfläche (Schnittfläche in halber Höhe und parallel zur Grundfläche). Die Mittelschnittebene halbiert alle Seiten - kanten.

4.8. Reguläre Polyeder (Platonische Körper)

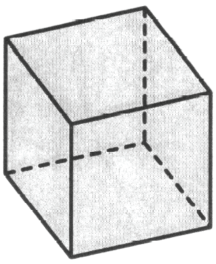
Ein Polyeder heisst **regulär** oder **Platonischer Körper**, wenn er von kongruenten Vielecken begrenzt wird und wenn in jeder Ecke gleich viele Kanten zusammenstossen.



reguläres Tetraeder:

Feuer

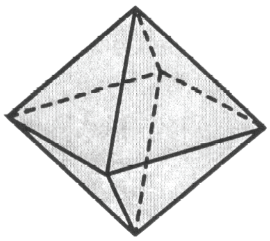
Wie der Würfel breit und lastend
im Bereich der Schwere ruht,
strebt empor das Tetraeder
wie die Flamme aus der Glut,
schwingt bewegt sich in die Weite,
nach der Höhe in die Breite,
und der Kanten strenges Streben
ist erfüllt von Kraft und Leben.



Würfel (Hexaeder):

Erde

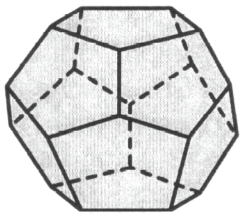
Gleicher Höhe, Länge, Breite,
rechtgewinkelt jede Seite,
zeigt des Würfels klare Form
klares Mass und klare Norm.
Weit entfernt vom Raum der Kugel,
die dem Himmel zu vergleichen,
sind des Würfels Kanten, Ecken
ganz und gar ein irdisch Zeichen.



Oktaeder:

Luft

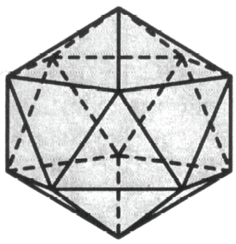
Oktaeder, schwebst im Raume
schwerelos fast wie im Traume,
ragst du ruhend im Gefilde
als kristallenes Gebilde.
Strebst hinaus nach allen Seiten,
in die Höhe, in die Weiten,
bist verwandt dem Element,
welches keine Schwere kennt
und als Atem allem Leben
seine Kraft vermag zu geben.



Dodekaeder:

Himmelsmaterie

Pentagondodekaeder,
lass im Raum, den du umschlossen,
tastend uns herum bewegen,
lass die Flächen deiner Hülle,
ihre Kanten, ihre Ecken
denkend in den Raum uns wandeln,
der zur Kugel weit sich rundet
und uns jene Kraft bekundet,
die im Anfang alles war
und in allem sein wird immerdar.

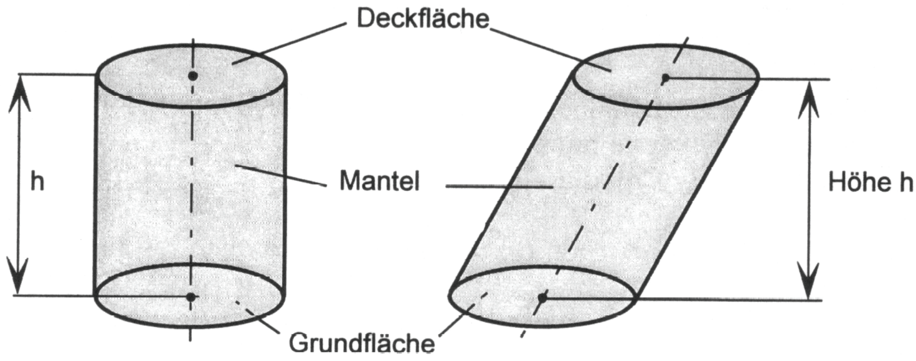


Ikosaeder:

Wasser

Wenn sich im Ikosaeder
zwanzig Flächen still berühren,
als würden sie die Kugel spüren,
fühlen wir die Kräfte walten,
die im Wasser sich entfalten,
wenn es sich zu Schnee verdichtet
und zur Sternenform sich lichtet.

4.9. Kreiszylinder



gerader Kreiszylinder schiefer Kreiszylinder

Verschiebt man eine Kreisfläche parallel um eine bestimmte Strecke, so entsteht ein Kreiszylinder.

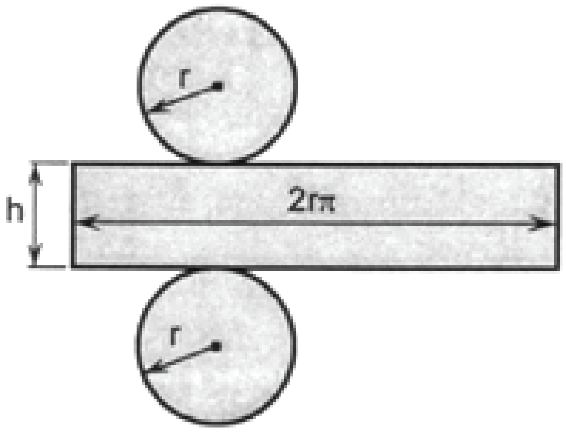
Mantellinie: Verbindungsstrecke zweier entsprechender Punkte Der beiden Kreislinien. Sie sind immer parallel zur Körperachse.

Volumen V: $\boxed{V = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h}$

Gerader Kreiszylinder

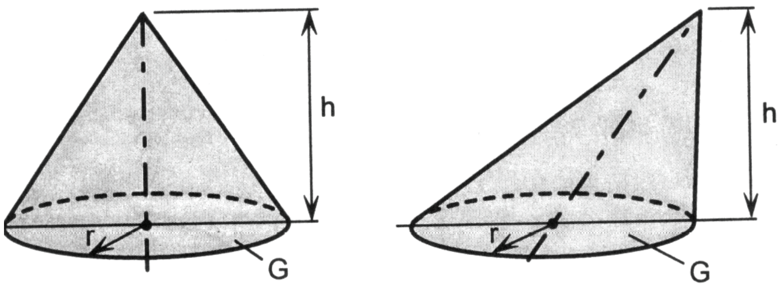
Verschiebung senkrecht zur Kreisfläche zur Kreisfläche, d.h. die Achse steht senkrecht zur Grund - und zur Deckfläche.

Oberfläche S: $\boxed{S = G + D + M = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)}$



4.10. Kreiskegel

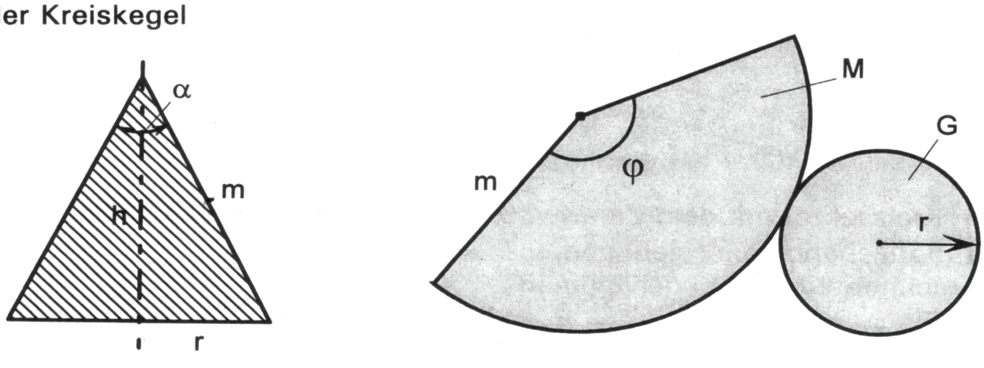
Verbindet man alle Punkte einer Kreislinie mit einem Punkt, der ausserhalb der Kreisebene liegt, durch Strecken, so entsteht ein **Kreiskegel** oder auch **Kegel** genannt.



gerader Kegel schiefer Kegel

Volumen V $\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h}$

Gerader Kreiskegel



$m^2 = r^2 + h^2$

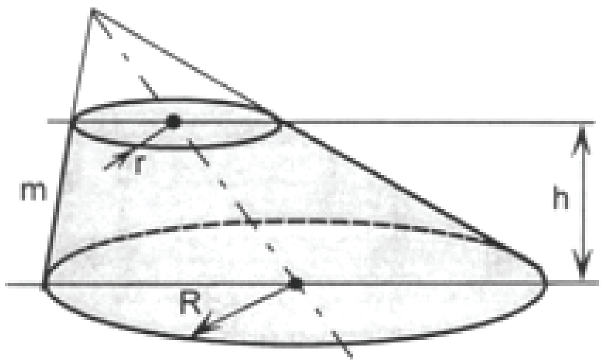
Mantelfläche M $\boxed{M = \pi r \cdot m}$

Oberfläche S $\boxed{S = \pi r(r + m)}$ $\boxed{\frac{\varphi}{360°} = \frac{r}{m}}$

M: Mantellinie
α: Öffnungswinkel
φ: Zentriwinkel des abgewickelten Mantels

4.11. Kegelstumpf

Kegelstumpf nennt man jeden geometrischen Körper, der entsteht, wenn ein Kreiskegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird. Damit erhält man einen Kegelstumpf und einen Ergänzungskegel.



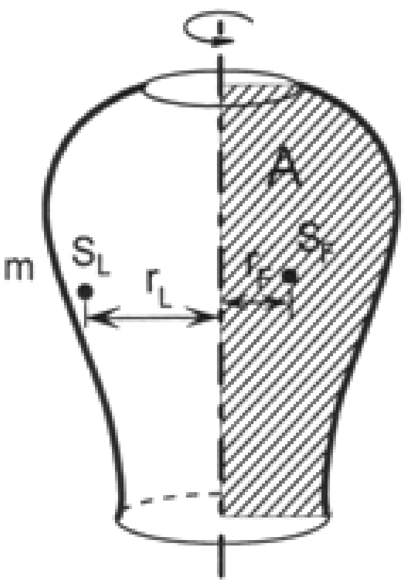
Volumen V:

$$\boxed{V = \frac{\pi}{3} \cdot h\left(r^2 + R^2 + R \cdot r\right)}$$

Der gerade Kegelstumpf

Mantelfläche: $\boxed{M = \pi m(r + R)}$

4.12. Guldinsche Regeln



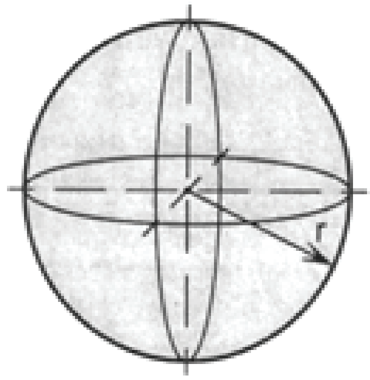
Meridian: Erzeugende ebene Kurve
S_F: Schwerpunkt der Meridianfläche
A: Inhalt der Meridianfläche
S_L: Schwerpunkt der Meridianlinie
m: Länge der Meridianlinie

$$\boxed{V = 2\pi \cdot r_F \cdot A}$$

Das **Volumen** eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt A der den Körper erzeugenden Fläche und dem Weg, den ihr Schwerpunkt bei einer Umdrehung um die Rotationsachse zurücklegt.

4.13. Kugel und Kugelteile

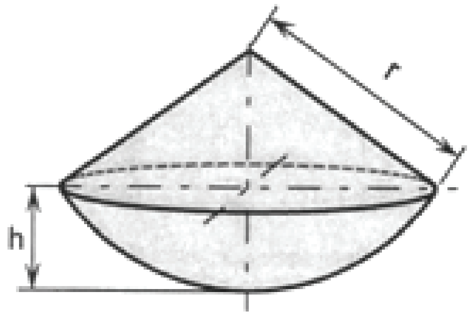
Kugel



Volumen $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

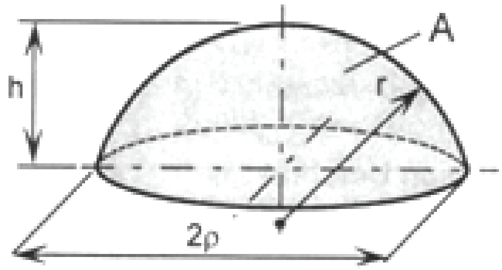
Oberfläche $S = 4\pi r^2$

Kugelsektor



Volumen $V = \frac{2\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$

Kugelsegment



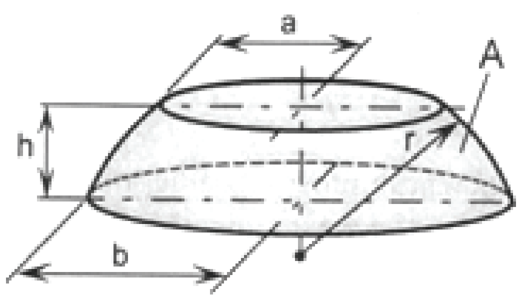
Volumen $V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 (3r - h)$

$V = \frac{\pi}{6} \cdot h(3\rho^2 + h^2)$

Oberfläche $S = A + \pi\rho^2$

Kugelhaube $A = 2\pi \cdot r \cdot h$

Kugelschicht

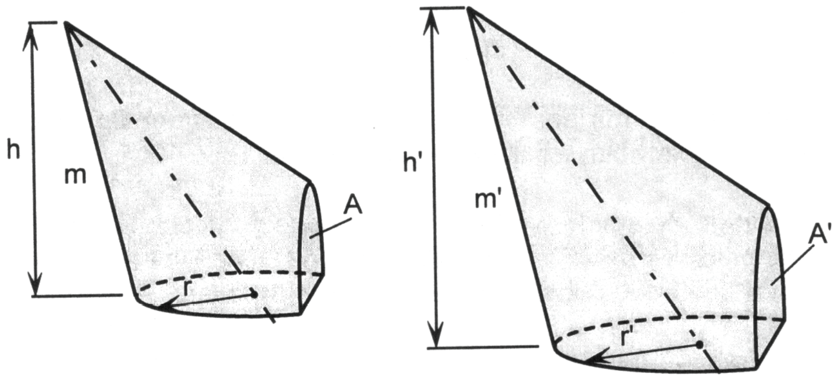


Volumen $V = \frac{\pi}{6} \cdot h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$

Oberfläche $S = A + \pi(a^2 + b^2)$

Kugelzone $A = 2\pi \cdot r \cdot h$

4.14. Ähnliche Körper



Für ähnliche Körper mit dem Streckungsfaktor k gilt:

Längen: $$\boxed{k = \frac{h'}{h} = \frac{r'}{r} = \frac{m'}{m} = \ldots\ldots}$$

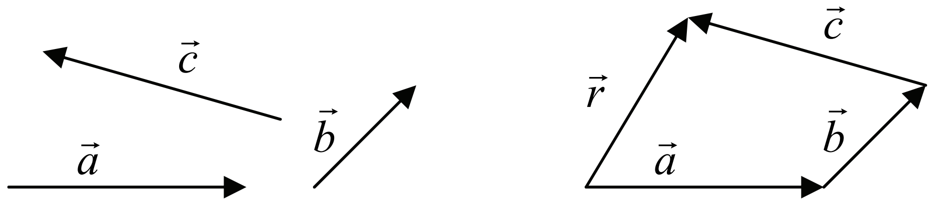
Flächeninhalte $$\boxed{k^2 = \frac{G'}{G} = \frac{M'}{M} = \frac{A'}{A} = \frac{S'}{S} = \ldots\ldots}$$

Volumen $$\boxed{k^3 = \frac{V'}{V}}$$

5. Vektorgeometrie

5.1. Elementare Vektoroperationen

Addition



Der Vektor $\vec{r}$ heisst die Summe oder Resultierende von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$$

Die Resultierende erhält man durch den Pfeil vom Anfangspunkt des ersten bis zum Endpunkt des letzten, angesetzten Pfeils.

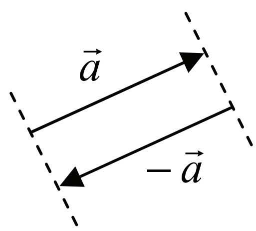
Rechengesetze

Kommutativgesetz: $\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}}$

Assoziativgesetz: $\boxed{\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)}$

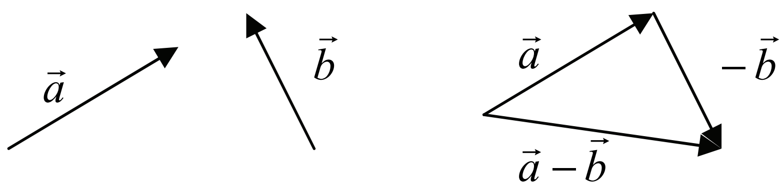
Subtraktion

Unter dem Gegenvektor $(-\vec{a})$ von $\vec{a}$ versteht Man jenen Vektor, der denselben Betrag, aber die entgegngesetzte Richtung wie $\vec{a}$ hat.



Der Gegenvektor einer Verschiebung

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



$$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)}$$

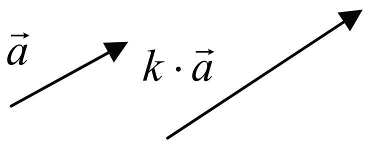
Rechengesetze

$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$ (Nullfektor)

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$

Multiplikation „Skalar mal Vektor“

Skalar = eine Grösse, bei der die Richtung keine Rolle spielt. (z.B. Temperatur)



$$\boxed{k \cdot \vec{a} = \vec{b}}$$

Betrag: $\left|\vec{b}\right| = \left|k \cdot \vec{a}\right| = \left|k\right| \cdot \left|\vec{a}\right|, \quad k \in R$

Richtung: $k > 0$: $k \cdot \vec{a}$ und $\vec{a}$ haben die gleiche Richtung
$k < 0$: $k \cdot \vec{a}$ und $\vec{a}$ sind entgegengesetzt

Sonderfälle: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}\,;\quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}\,;\quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Rechengesetze: $m \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}$

$(m+n) \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a} \qquad m, n \in R$

$m(n \cdot \vec{a}) = (m \cdot n) \cdot \vec{a}$

$\frac{\vec{a}}{m} = \frac{1}{m} \cdot \vec{a}$

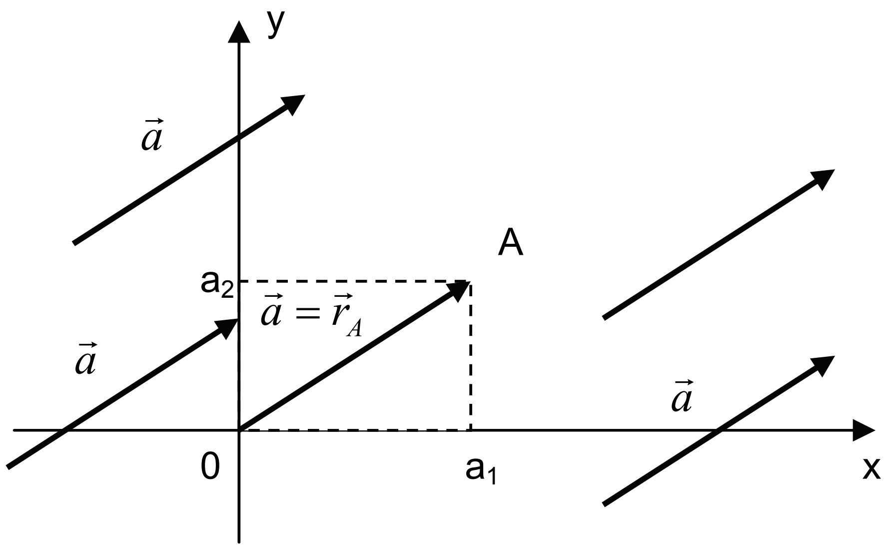
Kollineare Vektoren

Vektoren, die parallel oder antiparallel sind.

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear → $\vec{a} = k \cdot \vec{b}, \quad k \in R \wedge k \neq 0$

5.2. Zweidimensionale Vektoren

Die Menge aller Pfeile mit derselben Länge und derselben Richtung bildet einen Vektor eine Vektor. Ein einzelner Pfeil heisst **Repräsentant** (Vertreter) des Vektors.



Ortsvektor eines Punktes A

Repräsentant, der vom Koordinatenursprung 0 ausgeht.

Symbole: $\overrightarrow{0A}$ oder $\vec{r}_A$

Komponentendarstellung eines Vektors

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$; Die Zahlen a_1 und a_2 heissen Koordinaten oder Komponenten des Vektors $\vec{a}$

Rechengesetze

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}, \quad k \in R$$

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

5.3. Dreidimensionale Vektoren

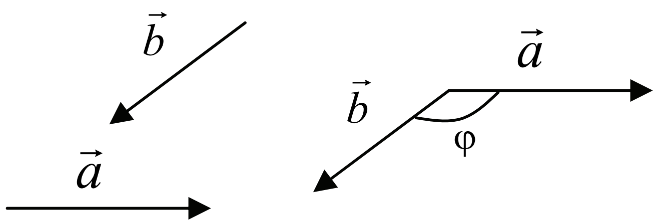
Rechengesetze

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}, \quad k \in R$$

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

5.4. Skalarprodukt



Winkel zwischen zwei Vektoren

$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$; $0° \le \varphi \le 180°$

Skalaprodukt $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\varphi)}$

Das Produkt von zwei Vektoren ist eine reelle Zahl, kein Vektor.

In Komponentendarstellung

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}$$

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}}$$

Gesetze

$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

$(m \cdot \vec{a}) \cdot (n \cdot \vec{b}) = mn(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad m, n \in R$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, welche vom Nullvektor verschieden sind, sind genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt.

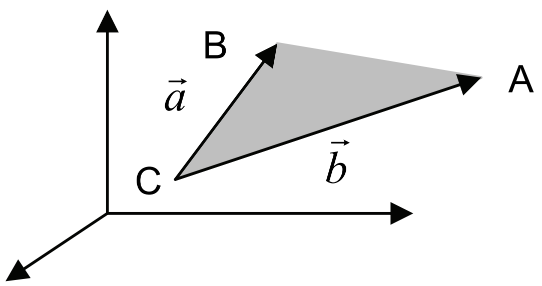
$\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Das Skalarprodukt heisst im englischen Sprachraum Dotproduct. Unter dieser Bezeichnung findet man die entsprechende Funktion auch auf gängigen Taschenrechner.

TI89 → CATALOG dotP

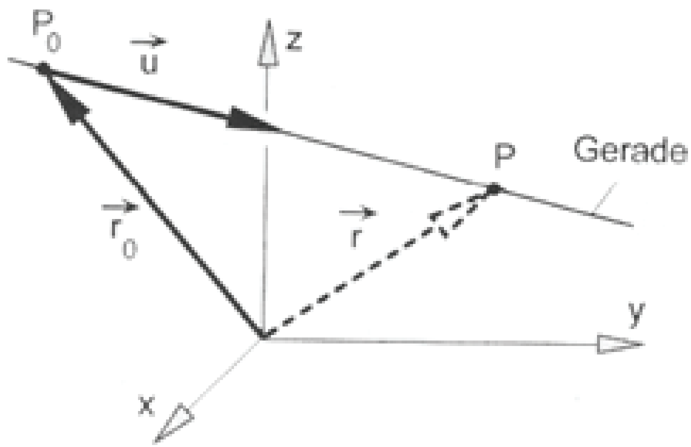
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	`dotP([ax,ay,az],[bx,by,bz])`
$\lvert\vec{a}\rvert$	`norm([ax,ay,az])`

5.5. Flächeninhalt eines Dreiecks



$$\boxed{A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}$$

5.6. Geraden



Parametergleichung einer Geraden:

$\boxed{r = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u}}$ mit $t \in R$

$\vec{r}_0$: Orsvektor des Ausgangspunktes P_0

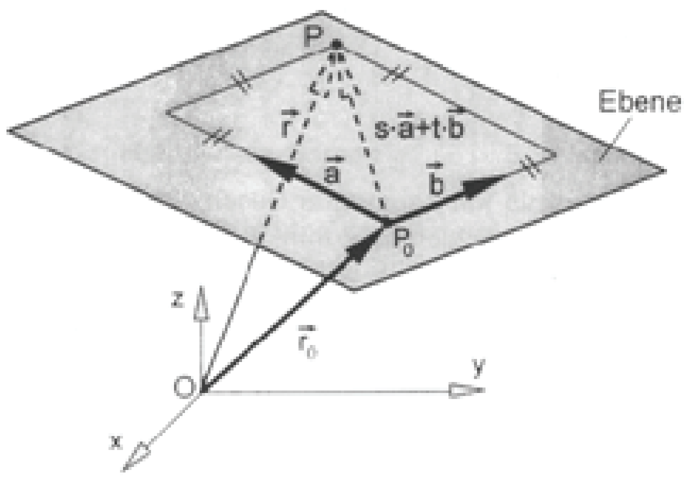
$\vec{r}$: Orsvektor eines beliebigen Punktes P der Geraden

t : Parameter

$\vec{u}$: Richtungsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot u_1 \\ y = y_0 + t \cdot u_2 \\ z = z_0 + t \cdot u_3 \end{cases}$$

5.7. Ebene



Parametergleichung einer Ebene:

$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}}$

mit $s, t \in R$

$\vec{r}_0$: Orsvektor des Ausgangspunktes P_0

$\vec{r}$: Orsvektor eines beliebigen Punktes P der Ebene

$\vec{a},\vec{b}$: Richtungsvektoren (spannen die Ebene auf)
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ dürfen nicht kollinear sein.

s,t : Parameter

Komponentengleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + s \cdot a_1 + t \cdot b_1 \\ y = y_0 + s \cdot a_2 + t \cdot b_2 \\ z = z_0 + s \cdot a_3 + t \cdot b_3 \end{cases}$$

5.8. Koordinatengleichung

Grundform der Koordinatengleichung

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$

Bei d = 0 verläuft die Ebene durch den Koordinatennullpunkt.

Normalvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ steht rechtwinklig auf der Ebene $ax + by + cz = d$.

Sind die Normalvektoren zweier Ebenen kollinear sind die Ebenen parallel oder liegen aufeinander.
Sind ebenfalls die Richtungsvektoren kollinear liegen die Ebenen aufeinander.

Umrechnung Parametergleichung zu Koordinatengleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem erstellen und Unbekannten auf eine Seite nehmen:

$$\begin{vmatrix} x = 3 + 2s - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + s \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2s + t + x = 3 \\ -t + y = -1 \\ -s + z = 1 \end{vmatrix}$$

Matrixdarstellung für die Eingabe in den Rechner:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Beim TI89 `APPS`→`Data/Matrix Editor` aufrufen und die Matrix eingeben.
Mit `2nd`→`QUIT` Editor verlassen und mit `CATALOG`→`ref(matrix)` die eingegebene Matrix berechnen lassen.

Resultat des Rechners:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$0s + 0t + \boxed{x + y - 2z = 0}$ → Koordinatengleichung

Umrechnung Koordinatengleichung zu Parametergleichung

Koordinatengleichung:

$$3x - y + 7z = 12$$

Nach einer beliebigen Unbekannten umstellen:

$$y = 3x + 7z - 12$$

Unbekannte auf rechter Seite durch die Parameter r uns s ersetzen und das Gleichungssystem erstellen:

$$\left| \begin{array}{l} x = r \\ y = -12 + 3r + 7s \\ z = s \end{array} \right|$$

Daraus lässt sich die Parametergleichung ableiten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

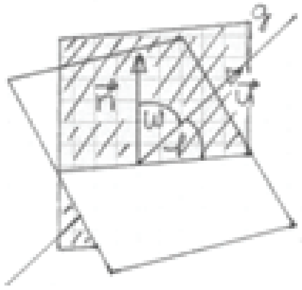
5.9. Abstand eines Punktes

Mit Hilfe der Hesse'schen Normalform kann man den Abstand eines beliebigen Punktes P(x / y / z) von einer Ebene ax + by + cz = d berechnen:

Hesse'sche Normalform $$\boxed{d = \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

d: Abstand

5.10. Winkelprobleme



$$\boxed{\sin(\varphi) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}}$$

$\vec{n}$: Normalvektor der Ebene
$\vec{u}$: Garade
φ : Winkel zwischen Ebene und Gerade